

## BILANGAN RADIO PADA GRAF GEAR

Ambar Puspasari<sup>1</sup>, Bambang Irawanto<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

**Abstract.** Let  $d(u,v)$  denote the distance between two distinct vertices of connected graph  $G$ , and  $\text{diam}(G)$  be the diameter of  $G$ . A radio labeling  $c$  of  $G$  is an assignment of positive integer to the vertices of  $G$  satisfying  $d(u, v) + |c(u) - c(v)| \geq \text{diam}(G) + 1$ . The maximum integer in the range of the labeling is its span. The radio number of  $G$ ,  $rn(G)$ , is the minimum possible span. Radio number of gear graph  $G'_n$ , for  $n \geq 4$  is  $rn(G'_n) = 4n + 2$ , and  $n = 7$  is  $rn(G'_n) = 4n + 2$ . The labeling of gear graph  $G'_n$ ,  $n=4,5,6$  is  $rn(G'_4) = 18$ ,  $rn(G'_5) = 22$ ,  $rn(G'_6) = 26$  than for  $n \geq 4$ , the radio number  $rn(G'_n)$  is  $4n + 2$ .

**Keywords :** radio number, diameter, gear graph, radio labeling

### 1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Pelabelan graf diperkenalkan pertama kali oleh Rosa pada tahun 1967. Pelabelan berdasarkan jarak pada graf termotivasi dari makalah karya Hales pada tahun 1980 yang memberikan model baru untuk masalah penetapan frekuensi.

Pelabelan radio diusulkan oleh Chartrand pada tahun 2001, dimana menganalogikan penetapan frekuensi pada pemancar saluran FM untuk menghindari gangguan sinyal. Pemancar radio yang berdekatan harus mempunyai frekuensi yang sangat berbeda, sedangkan pemancar radio yang berjauhan dapat mempunyai frekuensi

### 2. PELABELAN RADIO

Teori graf pertama kali dikenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika ia memikirkan kemungkinan menyebrangi seluruh jembatan kota Kaliningrad, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Permasalahan dan solusi yang dia tawarkan itulah yang kemudian dikenal sebagai teori graf.

**Definisi 2.1 [8]** Graf  $G$  terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Himpunan titik dinotasikan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan  $E(G)$ . Graf  $G$  dinotasikan  $G = (V, E)$ . Sisi  $vw$  atau  $wv$  dikatakan menghubungkan titik  $v$  dan  $w$ .

**Definisi 2.2 [1]** Jarak dari dua titik yaitu banyaknya sisi pada path terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jarak antara titik  $u$  dan  $v$  dinotasikan  $d(u,v)$ .

**Definisi 2.3 [1]** Diameter dari suatu graf adalah jarak terbesar antar dua titik dalam graf tersebut. Diameter dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $\text{diam}(G)$ .

**Definisi 2.4 [2]** Pelabelan radio dari graf  $G$  adalah pemetaan satu-satu  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$  yang memenuhi kondisi

$$d(u, v) + |c(u) - c(v)| \geq \text{diam}(G) + 1$$

untuk setiap  $u, v \in V(G)$  dan  $\mathbb{Z}_+$  adalah bilangan bulat positif.

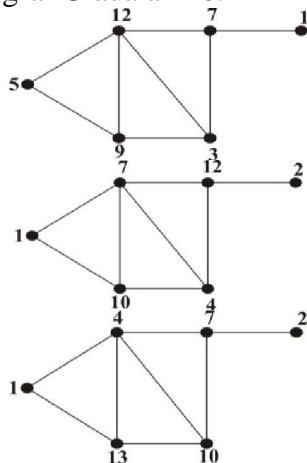
Untuk selanjutnya, kondisi ini disebut kondisi radio.

**Definisi 2.5 [2]** Jangkauan dari pelabelan  $c$  adalah bilangan bulat terbesar dimana  $c$  dipetakan ke himpunan titik pada graf  $G$ . Bilangan radio dari  $G$ ,  $rn(G)$ , adalah jangkauan terendah dari pelabelan radio pada graf  $G$ .

Secara umum pelabelan radio menggunakan langkah berikut ini :

1. Mencari diameter graf  $G$ . Setelah diameter diketahui, kondisi radio yang harus dipenuhi juga akan diketahui.
2. Menentukan titik awal yang akan diberi label, misalkan titik  $v_1$ , kemudian melabeli dengan bilangan bulat positif terkecil. Diperoleh  $c(v_1) = 1$ .
3. Menentukan titik yang akan diberi label selanjutnya, misal titik  $v_2$ . Dengan menggunakan nilai  $c(v_1)$  yang sudah ditentukan sebelumnya, nilai  $c(v_2)$  yang memenuhi kondisi radio dapat diperoleh.
4. Menentukan titik yang akan diberi label selanjutnya, misal titik  $v_3$ . Untuk mencari nilai  $c(v_3)$ , kondisi radio harus terpenuhi dari titik yang sudah terlabeli sebelumnya, yaitu titik  $v_1$  dan  $v_2$  sehingga akan diperoleh nilai  $c(v_3)$ . Begitu seterusnya sampai semua titik terlabeli.

Pelabelan radio pada sembarang graf sederhana akan diperoleh jangkauan yang berbeda bergantung pada urutan pemilihan titik. Pelabelan radio dilakukan berkali-kali dengan urutan titik yang berbeda sehingga didapatkan jangkauan yang berbeda pula. Bilangan radionya adalah jangkauan dengan nilai terkecil. Pada Gambar 1, pelabelan radio pada sembarang graf sederhana  $G$  diperoleh jangkauan yang berbeda, yaitu 12, 10, dan 13. Bilangan radio dari graf  $G$  adalah 10.



Gambar 1

Sebelum membahas bilangan radio pada graf gear, akan dibahas secara singkat

beberapa graf sederhana, yaitu graf lengkap, graf bintang dan graf roda.

**Definisi 2.6 [8]** *Graf lengkap adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda dihubungkan dengan tepat satu sisi. Graf lengkap dengan  $n$  titik dinotasikan dengan  $K_n$ .*

**Teorema 2.7 [2]** *Bilangan radio dari graf lengkap dengan  $n$  titik ( $K_n$ ) adalah  $n$ , yaitu  $rn(K_n) = n$ .*

**Definisi 2.8 [8]** *Graf bipartit adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipecah menjadi himpunan  $A$  dan  $B$  sedemikian hingga setiap sisi graf menghubungkan sebuah titik di  $A$  ke sebuah titik di  $B$ . Titik di  $A$  dibedakan dari titik di  $B$  dengan menggambarkan titik di  $A$  sebagai titik hitam dan yang di  $B$  sebagai titik putih.*

**Definisi 2.9 [8]** *Graf bipartit lengkap adalah graf bipartit yang setiap titik hitamnya dihubungkan dengan setiap titik putih tepat satu sisi. Graf bipartit lengkap dengan  $m$  titik hitam dan  $n$  titik putih dinotasikan  $K_{m,n}$ . Graf bipartiti lengkap juga bersifat  $K_{m,n} = K_{n,m}$ .*

Graf bipartit lengkap yang berbentuk  $K_{1,n}$  disebut graf bintang (*star graph*). Graf bintang juga dapat dinotasikan dengan  $S_n$ .

**Teorema 2.10 [2]** *Bilangan radio dari graf bintang  $S_n$  adalah  $n + 2$ , yaitu  $rn(S_n) = n + 2$ .*

**Bukti :**

$Diam(S_n) = 2$ . Pada graf bintang, pusat vertex berdekatan dengan setiap vertex yang lain. Hal ini menunjukkan bahwa untuk memberi label pada pusat dan vertex lain tidak boleh menggunakan bilangan bulat berurutan. Karena  $|V(S_n)| = n + 1$ , maka dapat diperoleh  $rn(S_n) = n + 2$ . Pada pusat diberi label 1 dan bilangan bulat berurutan dimulai dengan 3 untuk titik lainnya memperlihatkan pelabelan radio dengan rentangan  $n + 2$ , sehingga  $rn(S_n) = n + 2$ .

**Akibat 2.11 [2]** *Bilangan radio dari graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  :  $rn(K_{m,n}) = m + n + 1$ .*

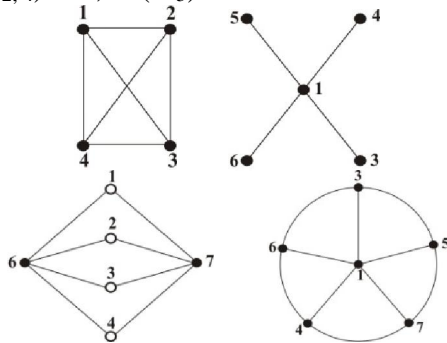
**Definisi 2.12 [8]** *Graf lingkaran (cycle graph) merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf*

lingkaran dengan  $n$  titik dilambangkan dengan  $C_n$ .

**Definisi 2.13 [2]** Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran  $C_n$  dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf lingkaran tersebut. Graf roda dengan  $n$  titik dilambangkan dengan  $W_n$ .

**Teorema 2.14 [2]** Untuk  $n \geq 5$ , bilangan radio dari graf roda  $W_n$  :  $rn(W_n) = n + 2$ .

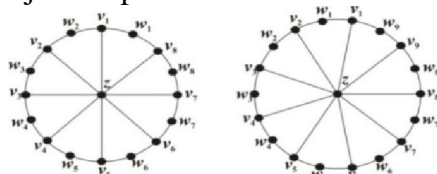
Pada Gambar 2 diberikan contoh pelabelan radio pada graf lengkap  $K_4$ , graf bintang  $S_4$ , graf bipartit lengkap  $K_{2,4}$ , dan graf roda  $W_5$ . Bilangan radio dari masing-masing graf adalah  $rn(K_4) = 4$ ,  $rn(S_4) = 6$ ,  $rn(K_{2,4}) = 7$ ,  $rn(W_5) = 6$ .



Gambar 2

### 3. BILANGAN RADIO GRAF GEAR

Untuk membuktikan bilangan radio dari gear- $n$  dengan menunjuk pada pelabelan titik dari gear- $n$  yang membedakan titik berdasarkan karakteristiknya. Vertex pusat diberi label  $z$ , dan titik yang berdekatan dengan pusat diberi label secara berurutan  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Titik yang tidak berdekatan dengan pusat diberi label secara berurutan  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ . Jika  $n$  ganjil maka  $w_1$  berdekatan dengan  $v_1$  dan  $v_2$ , sebaliknya jika  $n$  genap maka  $w_1$  berdekatan dengan  $v_1$  dan  $v_n$ . Pelabelan standar dari gear-8 dan dari gear-9 ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3 Pelabelan Standar dari Gear-8 dan Gear-9

**Teorema 3.1 [2]** Untuk  $n \geq 4$ ,  $rn(G'_n) = 4n + 2$ .

**Teorema 3.2 [2]** Untuk  $n \geq 7$ ,  $rn(G'_n) = 4n + 2$ .

**Bukti :**

Pelabelan radio  $c$  dari  $G'_n$  ditetapkan dalam dua langkah : pertama dengan mendefinisikan fungsi posisi yang mengganti titik dari  $G'_n$  dengan himpunan  $\{x_0, x_1, \dots, x_{2n}\}$ , kemudian menentukan label  $c(x_i)$  sehingga  $i < j$  jika dan hanya jika  $c(x_i) < c(x_j)$ . Setelah itu ditetapkan bahwa  $c$  adalah pelabelan radio, rentangan  $c$  memberikan batas atas untuk  $rn(G'_n)$ . Pada pembuktian ini,  $n \geq 7$ .

Pandang fungsi posisi  $p : V(G'_n) \rightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_{2n}\}$  didefinisikan sebagai berikut.

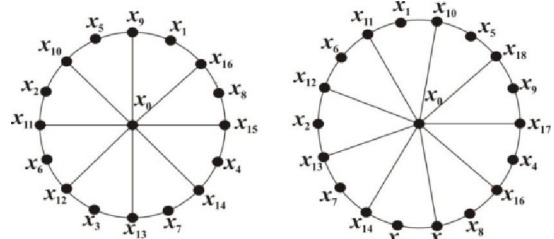
Jika  $n = 2k + 1$  didefinisikan

$$\begin{aligned} p(z) &= x_0, \\ p(w_{2i-1}) &= x_i \quad \text{untuk } i = 1, \dots, k+1, \\ p(w_{2i}) &= x_{k+1+i} \quad \text{untuk } i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(v_i) &= x_{n+i} \quad \text{untuk } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Jika  $n = 2k$  didefinisikan

$$\begin{aligned} p(z) &= x_0, \\ p(w_{2i-1}) &= x_i \quad \text{untuk } i = 1, \dots, k, \\ p(w_{2i}) &= x_{k+i} \quad \text{untuk } i = 1, \dots, k, \\ p(v_i) &= x_{n+i} \quad \text{untuk } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$



Gambar 4 Fungsi Posisi pada Graf  $G'_8$  dan  $G'_9$

Didefinisikan pelabelan radio  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ .

$$\begin{aligned} c(x_0) &= 1, \\ c(x_i) &= 3 + \frac{1}{2} + 2 + 3(-1)^i, \\ c(x_{k+i}) &= 0, \\ c(x_{k+1+i}) &= 1 + \frac{1}{2} + 2. \end{aligned}$$

**Klaim:** Pelabelan  $c$  merupakan pelabelan radio yang benar. Maka harus ditunjukkan bahwa kondisi radio,

$d(u, v) + |c(u) - c(v)| \geq \text{diam}(G'_n) + 1 = 5$ , berlaku untuk semua pasangan titik  $(u, v)$  (dimana  $u \neq v$ ).

**Kasus 1 :** Anggap pasangan  $(z, r)$  (untuk setiap vertex  $r \neq z$ ).

Karena  $p(z) = x_0$ . Untuk  $c(x_i) = 5$  untuk setiap  $i \geq 2$ , didapatkan  $d(z, x_i) + |c(z) - c(x_i)| = 1 + |1 - 5| = 5$  untuk semua  $i \geq 2$ . Keadaan ini menunjukkan adanya pengecualian untuk pasangan  $(z, x_1)$ . Tapi diketahui bahwa  $p^{-1}(x_1) = w_1$ , sehingga didapatkan  $d(z, w_1) + |c(z) - c(w_1)| = 2 + |1 - 4| = 5$ .

**Kasus 2 :** Pandang pasangan  $(w_j, w_k)$  (dengan  $j \neq k$ ).

Karena  $p(w_{2i-1}) = x_i$  dan perhatikan bahwa  $p(w_{2i})$  dapat ditulis sebagai  $x_{n-k+i}$  untuk  $n$  genap maupun ganjil. Didapatkan  $d(w_j, w_k) = 2$  untuk pasangan  $(w_{2i-1}, w_{2i})$ ,  $(w_{2i}, w_{2i+1})$ , dan  $(w_n, w_1)$ . Hal tersebut, secara berurutan, menunjuk pada  $(x_i, x_{n-k+i})$ ,  $(x_{n-k+i}, x_{i+1})$ , dan  $(x_s, x_1)$ , dimana  $s = k + 1$  jika  $n$  ganjil dan  $s = 2k$  jika  $n$  genap. Perhatikan perbedaan label untuk masing-masing pasangan:  $|c(x_i) - c(x_{n-k+i})| = n - k$ ,  $|c(x_{n-k+i}) - c(x_{i+1})| = n - k - 1$ , dan  $|c(x_s) - c(x_1)|$  adalah  $k$  jika  $s = k + 1$  ( $n$  ganjil) dan  $2k - 1$  jika  $s = 2k$  ( $n$  genap). Dalam semua kasus, diketahui  $n \geq 7$ , didapatkan bahwa  $|c(w_j) - c(w_k)| \geq 3$ , sehingga kondisi radio terpenuhi untuk  $d(w_j, w_k) = 2$ . Sementara itu, seandainya  $j$  dan  $k$  tidak berurutan (mod  $n$ ), didapatkan  $d(w_j, w_k) \geq 4$ . Seperti yang selalu terjadi bahwa  $|c(w_j) - c(w_k)| \geq 1$ , kondisi radio dipenuhi lagi.

**Kasus 3 :** Periksa pasangan  $(v_j, v_k)$  (dengan  $j \neq k$ ).

Perhatikan bahwa  $d(v_j, v_k) = 2$ . Karena  $|c(v_j) - c(v_k)| = |c(x_{n+j}) - c(x_{n+k})| \geq 3$  untuk semua  $v_j, v_k$ , kondisi radio dipenuhi.

**Kasus 4 :** Terakhir, pandang pasangan  $(v, w)$ , dimana  $v \in \{v_1, \dots, v_n\}$  dan  $w \in \{w_1, \dots, w_n\}$ .

Diperoleh  $c(v) \in \{n + 5, n + 8, \dots, 4n + 2\}$  dan  $c(w) \in \{4, 5, 6, \dots, n + 3\}$ . Untuk semua  $v \in v_1$ ,  $|c(v) - c(w)| \geq (n + 8) - (n + 3) = 5$ . Oleh karena itu kondisi radio terpenuhi jika  $v \in v_1$ . Sementara itu,  $|c(v_1) - c(w)| \geq (n + 5) - (n + 3) = 2$ . Jika  $w$  berjarak tiga atau lebih dari  $v_1$ , kondisi radio berlaku. Jika  $d(v_1, w) < 3$ , maka  $w = x_1$  atau  $w = w_1$ . Kondisi radio diperiksa

untuk masing-masing sehingga diperoleh  $d(v_1, x_1) + |c(v_1) - c(x_1)| = 5$ , dan  $d(v_1, w_1) + |c(v_1) - c(w_1)| = 5$ .

Keempat kasus ini membuktikan klaim bahwa  $c$  merupakan pelabelan radio dari  $G'_n$ . Jadi  $rn(G'_n) = \text{rentang}(c) = c(2n) = n + 2 + 3(2n - n) = 4n + 2$ .

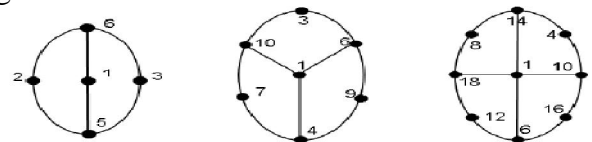
Secara keseluruhan, Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 mengarahkan bahasan utama dari tulisan ini

**Teorema 3.3 [2]** *Bilangan radio dari gear- $n$  adalah  $4n + 2$  bila  $n \geq 4$ .*

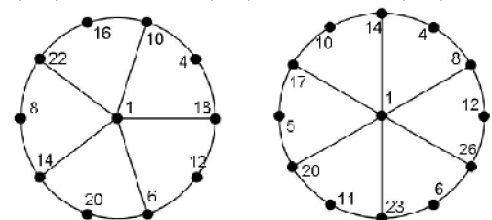
**Bukti :**

Teorema 3.1 menunjukkan  $rn(G'_n) = 4n + 2$  untuk  $n \geq 4$ , dan Teorema 6 menunjukkan  $rn(G'_n) = 4n + 2$  untuk  $n \geq 7$ . Dengan melabelkan graf Gear dengan  $n = 4, 5, 6$  secara langsung diperoleh  $rn(G'_4) = 18$ ,  $rn(G'_5) = 22$ ,  $rn(G'_6) = 26$ .

Sebagai contoh, diberikan pelabelan radio dari  $G'_n$  untuk  $n = 2, \dots, 6$  pada Gambar 4. Setiap pelabelan radio menggunakan jangkauan terkecil yang mungkin, dan dengan demikian menunjukkan bilangan radio dari setiap gear kecil.



$$\begin{array}{lll} \text{diam}(G_2) = 2 & \text{diam}(G_3) = 3 & \text{diam}(G_4) = 4 \\ rn(G_2) = 6 & rn(G_3) = 10 & rn(G_4) = 18 \end{array}$$



$$\begin{array}{lll} \text{diam}(G_5) = 4 & rn(G_5) = 22 & \text{diam}(G_6) = 4 \\ & rn(G_6) = 26 \end{array}$$

Gambar 5

#### 4. KESIMPULAN

Bilangan radio ditentukan dengan memenuhi kondisi radio. Kondisi radio yang harus dipenuhi :  $d(u, v) + |c(u) - c(v)| \geq \text{diam}(G) + 1$ . Kondisi radio bergantung pada jarak dan diameter. Sebelumnya dipaparkan bilangan radio pada beberapa graf sederhana yang berkaitan dengan graf

gear, yaitu graf lengkap  $K_n$ , graf bintang  $S_n$ , graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$ , dan graf roda  $W_n$ . Bilangan radio pada graf lengkap  $K_n$  :  $rn(K_n) = n$ , graf bintang  $S_n$  :  $rn(S_n) = n + 2$ , graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  :  $rn(K_{m,n}) = m + n + 1$ , dan graf roda  $W_n$  dengan  $n \geq 5$  :  $rn(W_n) = n + 2$ .

Selain bergantung pada jarak dan diameter, urutan pemilihan titik juga menentukan bilangan radio yang diperoleh. Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa bilangan radio pada graf gear  $G'_n$  dengan  $n \geq 4$  adalah  $4n + 2$ .

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bloom, G.S., Kennedy, J.W., and Quintas, L.V. (1988). A Characterization of Graphs of Diameter Two. *American Mathematical Monthly*, 95(1):37-38.
- [2] Christina Fernandez, America Flores, Maggy Tomova, and Cindy Wyels. (2008), *The Radio Number of Gear Graphs*.  
[http://faculty.csuci.edu/cynthia.wyels/REU/gears2008\\_09\\_12.pdf](http://faculty.csuci.edu/cynthia.wyels/REU/gears2008_09_12.pdf). (17 Desember 2009)
- [3] Cynthia Wyels and Maggy Tomova. *Graph Labeling*.  
[http://faculty.csuci.edu/cynthia.wyels/REU/Labeling\\_Project\\_Description.pdf](http://faculty.csuci.edu/cynthia.wyels/REU/Labeling_Project_Description.pdf). (7 Januari 2011)
- [4] Lipschutz, Seymour. (1964), *Set Theory and Related Topics*. New York : McGRAW-HILL BOOK COMPANY
- [5] Lipschutz, Seymour, Lipson, Marc Lars. (1992), *2000 solved Problem in discrete mathematic*. McGraw Hill, Inc. Singapore.
- [6] Melati Dwi Setyaningsih. (2010), *Pelabelan  $L(3, 2, 1)$  pada Beberapa Jenis Graf Sederhana*. Semarang : F. MIPA Universitas Diponegoro.
- [7] Rinaldi Munir. (2007), *Matematika Diskret*. Edisi Ketiga. Bandung : Informatika Bandung.
- [8] Robin J. Wilson and John J. Watkins. (1990), *Graph An Introductory Approach*, New York. John Wiley & Sons, Inc.